JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 24, 304–309 (1978)

Bestimmung von Konvergenzfaktoren aus asymptotischen Approximationseigenschaften Dirichletscher Reihen

LOTHAR HOISCHEN UND EBERHARD MOGK

Mathematisches Institut der Universität Giessen, D-6300 Giessen, Germany

Communicated by Oved Shisha

Received March 8, 1977

Es seien λ_n $(n = 0, 1, 2,...)$ reellwertige Zahlen mit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Eine komplexwertige Reihe $\sum a_n$ heißt durch das verallgemeinerte Abelverfahren (A, λ_n) summierbar zum Werte c (siehe z.B. [1, S.71]), falls

$$A(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$$

für alle $s > 0$ konvergiert mit $\lim_{s\to+0} A(s) = c$.

Im Falle $\lambda_n = n$ erhält man das bekannte Abelverfahren A. Bezüglich der Konvergenzfaktoren von A wurde in [4, S. 255] folgender Satz bewiesen:

SATZ 1. *Haben die komplexwertigen Zahlen k_n $(n = 0, 1, 2,...)$ die Eigenschaft, daß $\sum k_n a_n$ konvergent ist für alle A-summierbaren Reihen $\sum a_n$, dann gilt*

$$|k_n| \leqslant Rr^n \qquad (n = 0, 1, 2,...)$$

mit Konstanten $0 \leqslant R < \infty$ und $0 \leqslant r < 1$.

In [5] wurden entsprechende Ergebnisse für die Konvergenzfaktoren von verallgemeinerten Potenzreihenverfahren hergeleitet.

Der Beweis von Satz 1 in [4] benutzt als wesentliches Hilfsmittel funktionalanalytische Methoden zur expliziten Darstellung linearer, stetiger Abbildungen von FK-Räumen.

In dieser Arbeit wollen wir zeigen, daß aus Ergebnissen der Verfasser über die asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch Dirichletsche Reihen sehr einfach wesentliche Verschärfungen von Satz 1 gewonnen werden können, wobei wir mit dieser Beweismethode auch die Konvergenzfaktoren der (A, λ_n)-Summierbarkeit bezüglich einer beliebig vorgegebenen Konvergenzgeschwindigkeit von $A(s)$ für $s \to +0$ erhalten. Wir beweisen

0021-9045/78/0244–0304$02.00/0
Copyright © 1978 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

SATZ 2. *Es sei* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *mit* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant q > 0$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n) = \infty$. *Ferner sei h eine beliebige auf* $(0, \infty)$ *positive und stetige Funktion.*

Haben die komplexwertigen Zahlen k_n $(n = 0, 1, 2,...)$ *die Eigenschaft, daß die Folge* $(k_n a_n)$ *beschränkt ist für alle Reihen* $\sum a_n$ *mit*

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} = O(h(s)) \quad (s \to +0),$$

dann gilt

$$|k_n| \leqslant Rr^{\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2,...) \tag{1}$$

mit Konstanten $0 \leqslant R < \infty$ *und* $0 \leqslant r < 1$.

Aus Satz 2 erhalten wir im Falle $h(s) = O(1)$ $(s \to +0)$ folgendes

KOROLLAR. *Es sei* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *mit* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant q > 0$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n) = \infty$.

Ist die Folge $(k_n a_n)$ *für alle* (A, λ_n)*-summierbaren Reihen* $\sum a_n$ *beschränkt, dann gilt*

$$|k_n| \leqslant Rr^{\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2,...)$$

mit Konstanten $0 \leqslant R < \infty$ *und* $0 \leqslant r < 1$.

Dieses Korollar ergibt also speziell im Falle $\lambda_n = n$ bereits eine Verschärfung von Satz 1.

Mit der in dieser Arbeit benutzten Beweismethode läßt sich ferner die Frage untersuchen, wie stark die Reihenglieder derjenigen Reihen wachsen können, die durch folgende Limitierungsverfahren summiert werden.

Ist K eine für $s > 0$ gegebene komplexwertige Funktion, so nennen wir eine Reihe $\sum a_n$ in Verallgemeinerung des Abelverfahrens K-summierbar zum Werte c, falls

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(sn)$$

für alle $s > 0$ konvergiert mit $\lim_{s\to+0} \sigma(s) = c$.

Speziell für Funktionen K, die durch Potenzreihen dargestellt werden, beweisen wir

SATZ 3. *Es sei* $K(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-sk}$ *mit* $c_1 \neq 0$ *konvergent für* $s > 0$, *und es sei h eine auf* $(0, \infty)$ *positive, stetige Funktion. Ferner seien* w_n $(n = 1, 2,...)$ *positive Zahlen mit*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, w_n^{1/n} \leqslant 1. \tag{2}$$

Dann gibt es eine Reihe $\sum a_n$ *mit*

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(sn) = O(h(s)) \quad (s \to +0)$$

und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{w_n} = \infty.$$

Satz 3 zeigt also, daß es für Reihen, die mit beliebiger Konvergenzgeschwindigkeit K-summierbar sind, keine eigentliche Wachstumsbeschränkung gibt, sondern daß eine Einschränkung der Größenordnung zulässiger a_n lediglich durch die Bedingung $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leqslant 1$ wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} K(sn)$ gegeben ist.

Zum Beweis von Satz 2 und 3 benutzen wir als wesentliches Hilfsmittel

SATZ 4. *Es sei* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *mit* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant q > 0$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$. *Dann gibt es zu jeder auf* $(0, \infty)$ *stetigen Funktion* f, *für die* $\lim_{s\to\infty} f(s)$ *existiert, und zu jeder auf* $(0, \infty)$ *positiven, stetigen Funktion* h *mit* $\lim_{s\to\infty} h(s) > 0$ *eine für alle* $s > 0$ *absolut konvergente Dirichletsche Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ *mit*

$$\left| f(s) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} \right| < h(s) \quad (s > 0).$$

Ist $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$, *so kann hierbei* $a_0 = 0$ *gewählt werden.*

Ein solcher Approximationssatz wurde für ganze Dirichletsche Reihen in [3] und für Dirichletsche Reihen, die in einer Halbebene konvergieren, in [2, S. 17] hergeleitet.

Beweis von Satz 2. Gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2 die Behauptung (1) nicht, dann können wir zu beliebigen Zahlen $r_i \in (0, 1)$ $(i = 1, 2,...)$ mit $r_i \to 1$ $(i \to \infty)$ natürliche Zahlen n_i so bestimmen, daß

$$|k_{n_i}| \geqslant r_i^{\lambda_{n_i}} \tag{3}$$

für $i = 1, 2,...$ ist.

Hierbei dürfen wir die n_i als so schnell wachsend wählen, daß gilt

$$\sum_{1 < n \neq n_i (i=1,2,...)} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \tag{4}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} d_n &= n r_i^{-\lambda_n} \qquad (n = n_i\,,\ i = 1, 2, \ldots) \\ &= 0 \qquad\quad (n \neq n_i\,,\ i = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{5}$$

Für diese Koeffizienten d_n gilt daher $\overline{\lim}_{n\to\infty} | d_n |^{1/\lambda_n} \leqslant 1$. Die Reihe $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-s\lambda_n}$ konvergiert somit für $s > 0$. Wegen (4) existiert nach Satz 4 eine für $s > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe $B(s) = \sum_{1<n\neq n_i (i=1,2,\ldots)} b_n e^{-s\lambda_n}$ mit

$$f(s) - B(s) = O(h(s)) \qquad (s \to +0), \tag{6}$$

so daß wir für die Dirichletsche Reihe

$$A(s) = f(s) - B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n} \tag{7}$$

nach (6) die Abschätzung $A(s) = O(h(s))$ $(s \to +0)$ erhalten. Aus (3), (5), und (7) folgt jedoch

$$\begin{aligned} \sup_n | k_n a_n | &\geqslant \sup_i | k_{n_i} a_{n_i} | = \sup_i | k_{n_i} d_{n_i} | \\ &\geqslant \sup_i r_i^{\lambda_{n_i}} d_{n_i} = \sup_i n_i = \infty, \end{aligned}$$

was der vorausgesetzten Beschränktheit der Folge $(k_n a_n)$ widerspricht. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 3 benutzen wir die folgenden beiden Hilfssätze.

Lemma (a). *Konvergieren die Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_1 \neq 0$ für $| x | < 1$, dann gilt für die sich eindeutig aus der Beziehung*

$$b_n = \sum_{d/n} c_d a_{n/d} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

ergebenden Koeffizienten a_n, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ebenfalls für $| x | < 1$ konvergiert.

Beweis. Die a_n ergeben sich nach (8) eindeutig aus den b_n unc c_n, wie unmittelbar aus

$$a_n c_1 = b_n - \sum_{d>1,\, d/n} c_d a_{n/d} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

wegen $c_1 \neq 0$ durch Induktion nach n folgt.

Zum Beweis der Konvergenz von $\sum a_n x^n$ für $| x | < 1$ bilden wir für jedes $r \in (0, 1)$ die Werte

$$A_n = | a_n | r^n \qquad \text{und} \qquad M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Durch Multiplikation mit r^{n+1} erhalten wir aus (9)

$$\begin{aligned} A_{n+1}\,|c_1| &\leqslant |b_{n+1}|\,r^{n+1} + \sum_{d>1,\,d|n+1} |c_d|\,|a_{(n+1)/d}|\,r^{n+1} \\ &\leqslant |b_{n+1}|\,r^{n+1} + M_n \sum_{d>1,\,d|n+1} |c_d|\,r^{n+1-(n+1)/d} \\ &\leqslant |b_{n+1}|\,r^{n+1} + M_n r^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^{n+1} |c_i|. \end{aligned} \tag{10}$$

Da $r^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^{n+1} |c_i|$ mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt, wie leicht aus $\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leqslant 1$ folgt, so ergibt sich aus (10)

$$A_{n+1}\,|c_1| \leqslant |b_{n+1}|\,r^{n+1} + M_n\,|c_1|$$

für hinreichend große n und somit bei Beachtung von $M_{n+1} = \max(A_{n+1}, M_n)$ hieraus die Abschätzung

$$M_{n+1}\,|c_1| \leqslant |b_{n+1}|\,r^{n+1} + M_n\,|c_1|.$$

Daher ist $M_{n+1} - M_n \leqslant |b_{n+1}|/|c_1|\,r^{n+1}$ für hinreichend große n, woraus die Beschränktheit der M_n und damit auch die Beschränktheit der $A_n = |a_n|\,r^n$ für alle $r \in (0, 1)$ folgt, so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergiert. Damit ist Lemma (a) bewiesen.

Aus Satz 4 und Lemma (a) folgern wir

LEMMA (b). *Ist* $K(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-sk}$ *mit* $c_1 \neq 0$ *konvergent für* $s > 0$, *dann gibt es zu jeder auf* $(0, \infty)$ *stetigen Funktion* f *mit* $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$ *und zu jeder auf* $(0, \infty)$ *positiven, stetigen Funktion* h *mit* $\lim_{s\to\infty} h(s) > 0$ *eine für* $s > 0$ *konvergente Reihe* $\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(sn)$ *mit*

$$|f(s) - \sigma(s)| < h(s) \qquad (s > 0).$$

Beweis. Nach Satz 4 existiert unter obigen Voraussetzungen eine für $s > 0$ konvergente Potenzreihe $P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-sn}$ mit $|f(s) - P(s)| < h(s)$ $(s > 0)$. Für die Koeffizienten a_n, die sich nach Lemma (a), (8) aus den b_n und c_n ergeben, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-sn}$ und somit auch die Reihe $\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(sn)$ für $s > 0$, woraus

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-snk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} c_d a_{n/d} e^{-sn} = P(s)$$

für $s > 0$ folgt, so daß sich $|f(s) - \sigma(s)| < h(s)$ $(s > 0)$ ergibt, womit Lemma (b) bewiesen ist.

Beweis zu Satz 3. Wir setzen

$$d_n = 0 \qquad (n \text{ gerade})$$
$$\quad = nw_n \qquad (n \text{ ungerade}).$$

Aus (2) folgt daher $\overline{\lim}_{n\to\infty} | d_n |^{1/n} \leqslant 1$. Zu der für $s > 0$ konvergenten Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n K(sn)$ gibt es nach Lemma (b) eine für $s > 0$ konvergente Reihe $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n K(sn)$ mit

$$f(s/2) - g(s) = O(h(s/2)) \qquad (s \to +0). \tag{11}$$

Daher erhalten wir für die Reihe

$$\sigma(s) = f(s) - g(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} [d_n K(sn) - q_n K(s2n)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n K(sn)$$

nach (11) die Abschätzung $\sigma(s) = O(h(s))$ $(s \to +0)$. Da $a_n = d_n = nw_n$ für ungerade n ist, so folgt $\overline{\lim}_{n\to\infty} | a_n |/w_n = \infty$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

1. G. H. Hardy, "Divergent Series," Oxford Univ. Press, London/New York, 1956.
2. L. Hoischen, Über die asymptotische Approximation durch analytische Funktionen mit Anwendungen in der Theorie der Integraltransformationen und Limitierungsverfahren, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **74** (1967), 1–60.
3. L. Hoischen, Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch ganze Dirichlet-Reihen, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 293–299.
4. K. Zeller, Vergleich des Abelverfahrens mit gewöhnlichen Matrixverfahren, *Math. Ann.* **131** (1956), 253–257.
5. A. Ziv, Rate of growth and convergence factors for power methods of limitation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **76** (1974), 241–246.